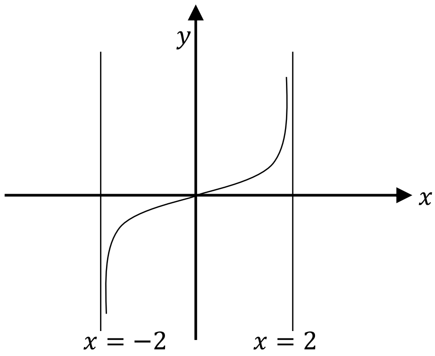
# حل ورقة تدريبية ① في مادة الرياضيات

## الصف الثالث الثانوي العلمي (2019 - 2020)

**السؤال الأول: في الشكل المجاور $C$ الخط البياني للتابع $f$ والمطلوب:**




**1) أوجد $D_f$ , $f(D)$**

$D_f = ]-2\,,2[ \quad , \quad f(D) = R$

**2) استنتج كل مقارب للخط $C$ واكتب الوضع النسبي لـ $C$ مع المقارب**

$\boxed{x = 2}$ مقارب شاقولي $\parallel yy'$ عند $(+\infty)$ ، $C$ يسار المقارب

$\boxed{x = -2}$ مقارب شاقولي $\parallel yy'$ عند $(-\infty)$ ، $C$ يمين المقارب

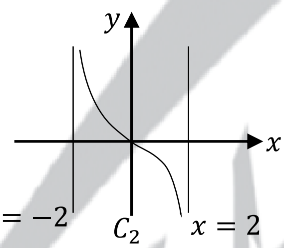
**3) أوجد مجموعة تعريف التابع $g(x) = \ln[f(x)]$**

$$g(x) = \ln\big(f(x)\big)$$
$$f(x) > 0$$
$$x \in ]0\,,2[$$
$$D_g = ]0\,,2[$$

**4) استنتج رسم الخط البياني لكل من التوابع:**

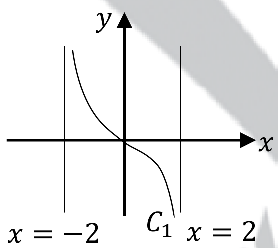
∗ $f_2(x) = -f(x)$

$C_2$ نظير $C$ بالنسبة لـ $xx'$



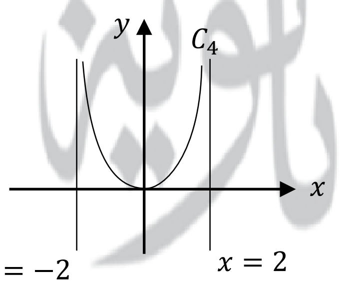

∗ $f_1(x) = f(-x)$

$C_1$ نظير $C$ بالنسبة لـ $yy'$



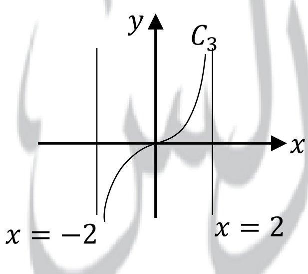

∗ $f_4(x) = |f(x)|$

$C_4$ ينتج عن $C$ بأحد نظائر التراتيب السابقة بالنسبة لمحور $xx'$



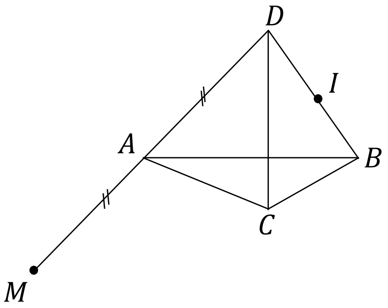

∗ $f_3(x) = -f(-x)$

$C_3$ نظير $C$ بالنسبة للمبدأ




.................................................................................................................................

**السؤال الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه والمطلوب:**




**1) عيّن موضع النقطة $M$ المحققة للمساواة: $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$**

$$\underbrace{\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}}_{\text{حسب شال}}=\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AD}$$

إذاً $M$ نظيرة $D$ بالنسبة لـ $A$

**2) هل النقطة $N$ التي تحقق المساواة: $\overrightarrow{DB}-2\,\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{MN}$ تقع على أحد رؤوس رباعي الوجوه**

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}$$

$$(B=N)$$

---

**السؤال الثالث: ليكن $f$ تابع معرف على $R$ وفق $f(x)=\frac{1}{3+2\sin x}$**

**1) أثبت أن $f$ محدود**

أياً كانت $x\in R$ فإن:

$$-1\le \sin x\le 1$$

$$-2\le 2\sin x\le 2$$

$$1\le 3+2\sin x\le 5$$

نقلب:

$$1\ge \frac{1}{3+2\sin x}\ge \frac{1}{5}$$

$$1\ge f(x)\ge \frac{1}{5}$$

$$f(x)\in\left[\frac{1}{5}\,,\ 1\right]$$

إذا $f$ محدود.

**2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3+2\sin x}$**

لدينا:

$$\frac{1}{5}\le f(x)\le 1$$

$$\frac{x^2}{5}\le \frac{x^2}{3+2\sin x}\le x^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{5}\right)=+\infty \overset{\text{حسب الإحاطة ③}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3+2\sin x}=+\infty$$

**3) بفرض** $g(x)=\frac{x^2}{3x^2+2\sin^2 x}$ **احسب** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = ?$ عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x^2}{x^2\left(3+2\,.\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{3+2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{5}$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{: علماً أن}\right)$

................................................................................................................................................................

**السؤال الرابع: ليكن لدينا في مجموعة الأعداد العقدية التابع** $f$ **المعرف وفق:** $f(Z)=\frac{iZ-i}{Z}$ : $Z\neq 0$

**ولتكن النقطة** $M(x,y)$ **تمثل العدد** $Z$

**1) حدد مجموعة النقاط** $M$ **بحيث يكون** $f(Z)\in R$ **حقيقي**

$$f(Z)=\overline{f(Z)}$$

$$\frac{i\,Z-i}{Z}=\frac{-i\,\overline{Z}+i}{\overline{Z}}$$

$$(iZ-i)\overline{Z}=Z\left(-i\,\overline{Z}+i\right)$$

$$iZ\,\overline{Z}-i\,\overline{Z}=-iZ\,\overline{Z}+iZ$$

$$2i\,Z\overline{Z}-i\overline{Z}-iZ=0$$

$$2Z\overline{Z}-\left(\overline{Z}+Z\right)=0$$

$$2(x^2+y^2)-2x=0$$

$$x^2+y^2-x=0$$

$$x^2-x+y^2=0$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

مجموعة النقاط $M$ تمثل معادلة دائرة مركزها $\left(\frac{1}{2},0\right)$ نصف قطرها $\frac{1}{2}$ محذوف منها النقطة $(0,0)$

**2) حدد مجموعة النقاط** $M$ **بحيث يكون** $f(Z)$ **تخيلي بحت**

$$f(Z)=-\overline{f(Z)}$$

$$\frac{-Z-i}{Z}=-\left(\frac{-i\overline{Z}+i}{Z}\right)$$

$$\frac{iZ-i}{Z}=\frac{i\overline{Z}-i}{Z}$$

$$(iZ-i)\overline{Z}=\left(i\overline{Z}-i\right)Z$$

$$iZ\overline{Z}-i\overline{Z}=i\overline{Z}Z-iZ$$

$$\overline{Z}=Z \quad \Longrightarrow \quad Z \text{ حقيقي}$$

إذاً مجموعة النقاط $M$ تمثل معادلة محور الفواصل $y=0$ ما عدا النقطة $M(0,0)$

**3) حل في $C$ : $f(Z) = (i-1)Z$**

$$f(Z) = (i-1)Z$$
$$\frac{iZ-i}{Z} = (i-1)Z$$
$$iZ - i = (i-1)Z^2$$
$$(i-1)Z^2 - iZ + i = 0$$
$$\Delta = (-i)^2 - 4(i-1)(i)$$
$$\Delta = -1 + 4 + 4i = 3 + 4i$$

بفرض : $\sqrt{\Delta} = x + yi$ هو الجذر التربيعي لـ $\Delta$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5$$
$$x^2 - y^2 = 3$$
$$2xy = 4 > 0$$

بجمع ① و ②: $2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \mp 2$

بطرح ① من ②: $2y^2 = 2 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

بما أن المعادلة ③ أكبر من الصفر فإن لـ $x, y$ نفس الإشارة

$$\sqrt{\Delta} = 2 + i \quad , \quad \sqrt{\Delta} = -2 - i$$

$$Z_1 = \frac{i-2-i}{2(i-1)} = \frac{-1}{-1+i} = \frac{-1(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$$

$$Z_2 = \frac{i+2+i}{2(i-1)} = \frac{2(1+i)}{2(-1+i)} = \frac{(1+i)(-1-i)}{2} = \frac{-1-i-i}{2} = -i$$

**4) بفرض $Z_1$ و $Z_2$ حلي المعادلة السابقة، اكتب $Z_1$ , $Z_2$ بالشكل المثلثي**

$$Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$Z_2 = -i$$
$$Z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

**5) احسب $Z_1^8 + Z_2^8$**

$$Z_1^8 + Z_2^8 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8 + \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^8$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) + \cos 12\pi + i\sin 12\pi$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 (1 + 0i) + 1 + 0i = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1$$
$$Z_1^8 + Z_2^8 = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16}$$

**التمرين الأول: احسب نهاية التابع $f$ عند $+\infty$**

① $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{x-\ln x}{\ln x+x}}$

$+\infty-\infty$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)}=\frac{1-\frac{\ln x}{x}}{\frac{\ln x}{x}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

② $\boldsymbol{f(x)=x-\dfrac{2x}{\ln x}}$

$+\infty-\infty$ عدم تعيين

$$f(x)=x\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty(1-0)=\infty$$

③ $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}}$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$$f(x)=x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=x\left(\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\,.\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\frac{x\left(x-1-(x+1)\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\frac{x(-2)}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\frac{-2x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$|x|=+x\ :\ x\to\infty$

$$=\frac{-2x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{-2}{\infty}=0$$

④ $\boldsymbol{\left|f(x)+\dfrac{1}{2}\right|\le\sqrt{2x^4+1}-\sqrt{2}x^2}$

بفرض : $g(x)=\sqrt{2x^4+1}-\sqrt{2}x^2$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$$g(x)=\frac{\left(\sqrt{2x^4+1}-\sqrt{2}x^2\right)\left(\sqrt{2x^4+1}+\sqrt{2}x^2\right)}{\sqrt{2x^4+1}+\sqrt{2}x^2}$$

$$=\frac{2x^4+1-2x^4}{\sqrt{2x^4+1}+\sqrt{2}x^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x^4+1}+\sqrt{2}x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$

$$\overset{\text{حسب الإحاطة ②}}{\Longrightarrow}\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{-1}{2}$$

.............................................................................................................

**التمرين الثاني: لتكن لدينا الأعداد العقدية $Z_1 = \sqrt{3} - i$ , $Z_2 = \sqrt{3} + 3i$**

**1) أوجد $Z_3$ معاكس $Z_1$ ، $Z_4$ مرافق $Z_2$**

$Z_3 = -Z_1 = -\sqrt{3} + i$ , $Z_4 = \overline{Z}_2 = \sqrt{3} - 3i$

**2) أثبت أن $W = \frac{Z_1 - Z_4}{Z_1 - Z_2}$ عدد حقيقي**

$$W = \frac{Z_1 - Z_4}{Z_1 - Z_2} = \frac{\sqrt{3} - i - (\sqrt{3} - 3i)}{\sqrt{3} - i - (\sqrt{3} + 3i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - 3i} = \frac{2i}{-4i} = \frac{-1}{2}$$ حقيقي

**3) أثبت أن $Z = \frac{Z_2}{Z_1}$ عدد تخيلي بحت**

$$Z = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{3 + \sqrt{3}\, i + 3\sqrt{3}\, i - 3}{3 + 1}$$

$$Z = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}\, i$$ تخيلي بحت

**4) احسب $|Z^{10}|$ , $\overline{Z + W}$ , $|Z + W|$**

$$|Z^{10}| = |Z|^{10} = (\sqrt{3})^{10} = (3)^5 = 243$$

$$\overline{Z + W} = \overline{Z} + \overline{W} = -\sqrt{3}\, i - \frac{1}{2}$$

$$|Z + W| = \left| -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\, i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

---

**التمرين الثالث: حل في $R$ كلاً من:**

① $\ln\left(\frac{\sqrt{x-2}}{x}\right) = 0$

شرط الحل : $\frac{\sqrt{x-2}}{x} > 0$

$x > 0$

$D_2 = ]0, +\infty[$

شرط الجذر : $x - 2 > 0$

$x > 2$

$D_1 = ]2, +\infty[$

$D = ]2, +\infty[$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x-2}}{x}\right) = 0 = \ln(1)$$

$$\frac{\sqrt{x-2}}{x} = 1$$

$$\sqrt{x-2} = x$$

نربع : $x - 2 = x^2$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ المعادلة مستحيلة الحل في $R$

② $\ln x^2 + \ln(x-1) > \ln(4x-4)$

شرط الحل:

| $x^2 > 0$ <br> $x \neq 0$ <br> $D_1 = R\backslash\{0\}$ | $x-1>0$ <br> $x>1$ <br> $D_2 = ]1,+\infty[$ | $4x-4>0$ <br> $x>1$ <br> $D_3 = ]1,+\infty[$ |
|---|---|---|

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = ]1,+\infty[$$

$\ln x^2 + \ln(x-1) > \ln(4x-4)$

$\ln\big(x^2(x-1)\big) > \ln(4x-4)$

$x^2(x-1) > 4x-4$

$x^2(x-1) > 4(x-1)$

$x^2 > 4$

$x^2 - 4 > 0$

$x^2 - 4 = 0$

$(x+2)(x-2) = 0 \quad \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| معادلة | $+$ | $0$ $-$ | $0$ $+$ | |
| متراجحة | محققة | غير محققة | محققة | |

$$I = ]-\infty,-2[\, \cup \,]2,+\infty[$$

$$S = I \cap D = ]2,+\infty[$$

.........................................................................

③ $\ln(x-6) - \ln 4 = \ln 2 - \ln(x+1)$

شرط الحل:

| $x-6>0$ <br> $x>6$ <br> $D_1 = ]6,+\infty[$ | $x+1>0$ <br> $x>-1$ <br> $D_2 = ]-1,+\infty[$ |
|---|---|

$$D = D_1 \cap D_2 = ]6,+\infty[$$

$\ln(x-6) - \ln 4 = \ln 2 - \ln(x+1)$

$\ln(x-6) + \ln(x+1) = \ln 2 + \ln 4$

$\ln[(x-6)(x+1)] = \ln(2\,.\,4)$

$(x-6)(x+1) = 8$

$x^2 - 5x - 6 = 8$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$(x-7)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x = 7 \in D & \text{مقبول} \\ x = -2 \notin D & \text{مرفوض} \end{cases}$

$S = \{7\}$

④ $\mathbf{4\ln^2 x + \ln x \leq 3}$

شرط الحل: $x > 0$ ، $D = ]0, +\infty[$

$4\ln^2 x + \ln x - 3 \leq 0$

$4\ln^2 x + \ln x - 3 = 0$

$\Delta = 49 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 7$

$\ln x_1 = \dfrac{-1+7}{8} = \dfrac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = e^{\frac{3}{4}}$

$\ln x_2 = \dfrac{-1-7}{8} = -1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad \frac{1}{e}$ | $e^{\frac{3}{4}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| معادلة | $+$ $\quad 0$ | $-$ $\quad 0$ | $+$ |
| متراجحة | محققة | غير محققة | محققة |

$$I = \left[\frac{1}{e}, e^{\frac{3}{4}}\right]$$

$$S = I \cap D = \left[\frac{1}{e}, e^{\frac{3}{4}}\right]$$

.............................................................................................................................

**المسألة الأولى: بفرض $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $]0,2[ \cup ]2,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$**

**1) أوجد ما للخط $C$ من مستقيمات مقاربة**

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad \Longrightarrow$ $x = 0$ مقارب شاقولي منطبق على $yy'$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \quad \Longrightarrow$ $x = 2$ مقارب شاقولي يوازي $yy'$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \quad \Longrightarrow$ $x = 2$ مقارب شاقولي يوازي $yy'$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

**2) ادرس تغيرات التابع $f$ ونظم جدولاً بها**

$f$ معرف واشتقاقي على $]0,2[ \cup ]2,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2}$

$= \dfrac{-x + x^2 - 4x + 4}{x(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$

$f'(x) = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

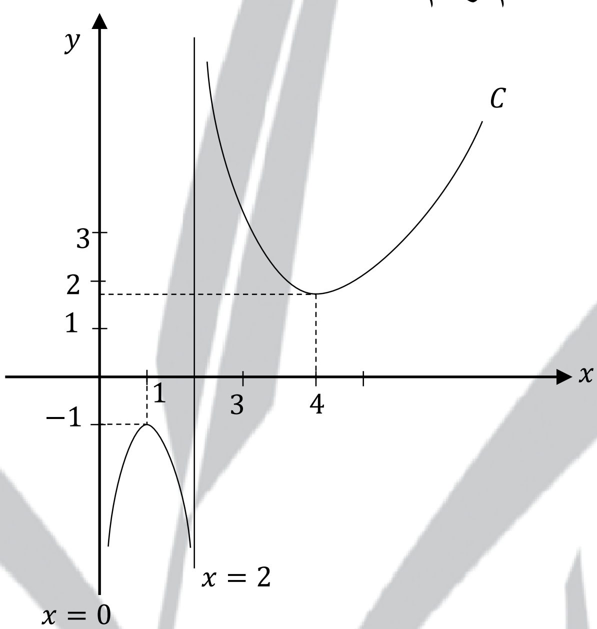
$(x-4)(x-1)=0 \quad \begin{cases} x=4 \\ x=1 \end{cases}$

$f(4)=\dfrac{1}{2}+\ln 4=\dfrac{1}{2}+2\ln 2 \qquad , \qquad f(1)=-1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | \|\| | $-\infty \nearrow$ | $-1$ | $\searrow -\infty$ | \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}+2\ln 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(1)=-1$ قيمة حدية كبرى ، $f(4)=\frac{1}{2}+2\ln 2$ قيمة حدية صغرى

**3) ارسم كل مقارب للخط $C$ ثم ارسم $C$**

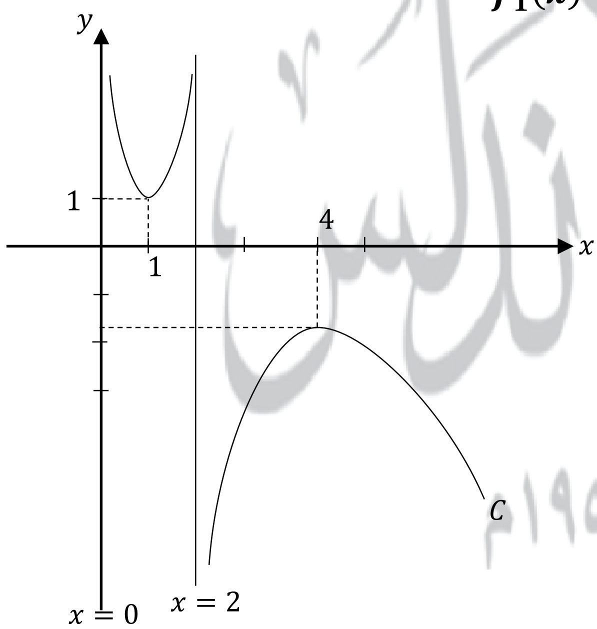


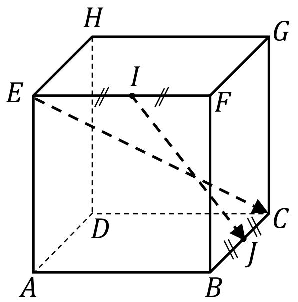

**4) استنتج رسم $C_1$ الخط البياني للتابع $f_1(x)=\frac{1}{2-x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$**

$C_1:\ f_1(x)=\dfrac{1}{2-x}-\ln x=-\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]$

$f_1(x)=-f(x)$

$C_1$ نظير $C$ بالنسبة لـ $xx'$






**المسألة الثانية: مكعب فيه $I$ منتصف $[EF]$، $J$ منتصف $[CB]$ والمطلوب:**

**1) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ , $\overrightarrow{GC}$ , $\overrightarrow{EC}$ مرتبطة خطياً**

$$+\quad \begin{array}{l} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ} \\ \underline{\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BJ}} \end{array}$$

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FB}$$

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{GC}$$

فالأشعة الثلاث مرتبطة خطيا

**2) اختر معلماً مبدأه $D$ وأوجد إحداثيات رؤوس المكعب وإحداثيات النقطتين $I$ , $J$**

$$\left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right) \quad , \quad D(0,0,0)$$

$$A(1,0,0) \quad , \quad C(0,1,0) \quad , \quad H(0,0,1)$$

$$B(1,1,0) \quad , \quad E(1,0,1) \quad , \quad F(1,1,1)$$

$$G(0,1,1) \quad , \quad I\left(1\,,\frac{1}{2},1\right) \quad , \quad J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$$

**3) أوجد إحداثيات النقطة $K$ نظيرة $J$ بالنسبة لـ $B$**

$$\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{BK}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{2} = x - 1 \;\rightarrow\; \boxed{x = \frac{3}{2}} \\ 0 = y - 1 \;\rightarrow\; \boxed{y = 1} \\ \boxed{0 = z} \end{array}$$

$$K\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right)$$

................................................................................................